трехмерном проективном пространстве."Дифференциальная геометрия многообразий фигур",вып.3,1973,41-49.

2.Ткач Г.П.,О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур",вып.3,1973, I43-I53.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

Новожилова Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПАР ФИГУР,ОБРАЗОВАННЫХ ПРЯМОЙ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются конгруэнции $(LP)_{2,1}$ [I]-вырожденные конгруэнции пар фигур, образованных прямой L и точкой P, не инцидентной этой прямой,когда (L) - прямолинейная конгруэнция,а (P)-линия. Исследованы расслояемые конгруэнции $(LP)_{2,1}$.

§I.Канонический репер конгруэнции $(LP)_{2,1}$.

Канонический репер $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ конгруэнции $(LP)_{2,1}$ строится следующим образом: вершину A репера помещаем в центр луча L прямолинейной конгруэнции (L) ,конец N вектора $\bar{e}_3$ в один из фокусов этого луча,конец вектора $\bar{e}_1$ помещаем в точку P ,соответствующую лучу L ,вектор $\bar{e}_2$ направляем параллельно касательной L' к линии (P) в точке P .Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i,\quad d\bar{e}_i=\omega_i^j\bar{e}_j,\quad (i,j,\ldots=1,2,3), \qquad (1)$$

где формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \,, \quad \mathcal{D}\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k \qquad (2)$$

и условию эквиаффинности

$$\omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 = 0. \qquad (3)$$

Выбираем формы Пфаффа ω^1, ω^2 за независимые первичные формы, тогда

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0. \qquad (4)$$

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции $(LP)_{2,1}$ приводится к виду:

$$\omega^3 = \Gamma^3_k \omega^k \,, \quad \omega^1_1 = -\omega^1 \,, \quad \omega^3_1 = -\omega^3 \,, \quad \omega^i_2 = \Gamma^i_{2k}\omega^k \,,$$

$$\omega^l_3 = \Gamma^l_{3k}\omega^k \,, \quad \omega^2_1 = \Gamma^2_{1k}\omega^k \,, \quad (k, l = 1, 2) \,; \qquad (5)$$

$$\Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{32} = S \,, \quad \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{32} + S^2 = 1 \,, \quad \Gamma^1_{21} = \mu\Gamma^1_{22} \,,$$

$$\Gamma^3_{21} = \mu\Gamma^3_{22} \,, \quad \text{где} \quad \mu = \frac{\Gamma^2_{11}}{1 + \Gamma^2_{12}} \,. \qquad (6)$$

Исследуя эту систему, приходим к следующей теореме:

Т е о р е м а I. Конгруэнции $(LP)_{2,1}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

§2. Расслояемые конгруэнции $(LP)_{2,1}$.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнция $(LP)_{2,1}$ называется расслояемой, если существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (L) к многообразию прямых (L') [2].

Условия одностороннего расслоения от прямолинейной конгруэнции (L) к многообразию прямых (L') записываются в виде:

$$\omega^2_3 \wedge \omega^1_2 = 0 \,, \quad \omega^2 \wedge \omega^1_2 + \omega^2_3 \wedge \omega^3_2 = 0 \,, \quad \omega^2 \wedge \omega^3_2 = 0 \,. \qquad (7)$$

Анализируя уравнения (5),(6),(7), выделяем следующие три случая:

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^3_{21} = 0, \quad S^2 = 1, \quad S(2\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21} - 1) = \Gamma^3_1 ; \quad (8)$$

$$\Gamma^3_{22} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^1_{21} = 0, \quad S^2 = 1, \quad S(2\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21} - 1) = 0 ; \quad (9)$$

$$\Gamma^3_{22} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{21} = 0 \,, \qquad (10)$$

которые определяют, соответственно, расслояемые конгруэнции $(LP)^1_{2,1}, (LP)^2_{2,1}, (LP)^3_{2,1}$. Рассматривая замкнутую систему уравнений каждого из этих классов конгруэнций $(LP)_{2,1}$, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $(LP)^1_{2,1}$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов. Конгруэнции $(LP)^2_{2,1}$ существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента. Конгруэнции $(LP)^3_{2,1}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Геометрически конгруэнции $(LP)^3_{2,1}$ характеризуются тем, что линия (P) есть прямая. Действительно, из соотношений (10),(6) и системы уравнений (5) находим:

$$d\bar{P} = (\omega^2 + \omega^2_1)\bar{e}_2 \quad , \quad d\bar{e}_2 = \omega^2_2 \bar{e}_2 \,.$$

Следовательно, линия (P) является прямой. Конгруэнции $(LP)^1_{2,1}$, $(LP)^2_{2,1}$ – торсовые конгруэнции [3].

Т е о р е м а 3. Если касательная плоскость к поверхности (A) проходит через прямую L^1, то конгруэнции $(LP)^1_{2,1}$, $(LP)^2_{2,1}$, $(LP)^3_{2,1}$ являются аффинно расслояемыми от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ и от прямолинейной конгруэнции (AP) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие того, что прямая L^1 инцидентна касательной плоскости к поверхности (A) в точке A записывается в виде:

$$\Gamma^3_k = 0. \tag{11}$$

Аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ и от прямолинейной конгруэнции (AP) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ задается следующими квадратичными уравнениями:

$$\begin{cases} \omega^k \wedge \omega^3_k = 0, \\ \omega^k_3 \wedge \omega^3_k = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega^{k+1} \wedge \omega^1_{k+1} = 0, \\ \omega^{k+1}_1 \wedge \omega^1_{k+1} = 0, \end{cases}$$

которые тождественно удовлетворяются в силу условия (11) и, соответственно, условий (8), (9) или (10).

Для конгруэнций $(LP)^2_{2,1}$ справедлива и обратная теорема.

Т е о р е м а 4. Конгруэнции $(LP)^1_{2,1}$ обладают следующими свойствами: 1/ прямолинейные конгруэнции (L) и (AP) имеют общую фокальную поверхность, являющуюся огибающей семейства плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$, 2/ если фокальная точка F_1 луча L прямолинейной конгруэнции (L) совпадает с характеристической точкой грани $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, то фокальная сеть на поверхности (F_1) является координатной сетью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Фокус $\bar{F}_2 = \bar{A} + S\bar{e}_3$ луча L прямолинейной конгруэнции (L) и фокус $\bar{A} - \frac{1}{\Gamma^2_{12}}\bar{e}_2$ луча AP прямолинейной конгруэнции (AP) инцидентны характеристике

$$1 + \Gamma^2_{12} x^1 - S x^3 = 0, \quad x^2 = 0 \tag{12}$$

плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$. 2/ Фокальная точка $\bar{F}_1 = \bar{A} - S\bar{e}_3$ луча L прямолинейной конгруэнции (L) совпадает с характеристической точкой грани $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ в том случае, если

$$\Gamma^1_{32} = 0. \tag{13}$$

В силу условия (13), уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (L) принимает вид:

$$\omega^1 \omega^2 = 0,$$

т.е. фокальная сеть на поверхности (F_1) является координатной сетью.

Т е о р е м а 5. Для конгруэнции $(LP)^2_{2,1}$ справедливы следующие свойства: I/соприкасающаяся плоскость кривой (P) в точке P проходит через точку A, 2/поверхность (A) есть линейчатая поверхность с образующей AP.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение I/ теоремы пять непосредственно следует из системы (5) и соотношений (9). 2/ Рассмотрим на поверхности (A) линию $\omega^2=0$.

$$(dA)_{\omega^2=0}=\omega^1\bar{e}_1, \quad (d\bar{e}_1)_{\omega^2=0}=-\omega^1\bar{e}_1,$$

т.е. линия $\omega^2=0$ является прямой, и поверхность (A) линейчатая.

Л и т е р а т у р а.

I. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2. Похила М.М., Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2, 1971, 43-54.

3. Новожилова Т.П., Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.4.

4. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференциальная геом. многообразий фигур", вып.3, 1973, I43-153.

5. Фиников С.П., Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

О в ч и н н и к о в В.М.

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ $\Psi_{2,3}$.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются пары $\Psi_{2,3}[3]$, образованные конгруэнцией коник (C) и поверхностью S_2. Для подкласса таких пар решена задача расслоения от конгруэнции коник (C) к прямолинейной конгруэнции, ассоциированной с парой $\Psi_{2,3}$.

§I. Репер пары $\Psi_{2,3}$.

Отнесем пару $\Psi_{2,3}$ к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, где A_3 – характеристическая точка плоскости коники C, точки A_1, A_2 располагаются на конике таким образом, что треугольник $A_1A_2A_3$ является автополярным треугольником второго рода, вершина A_4 совмещается с текущей точкой поверхности S_2.

Деривационные формулы репера R записываются в виде:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1.1}$$

где ω_α^β – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры